Bachillerato Internacional

Portada de la Monografía

Los alumnos deben llenar esta hoja y entregarla al supervisor junto con la versión final de su monografía.			
Número de convocatoria del alumno			
Nombre y apellido(s) del alumno			
Número del colegio			
Nombre del colegio			
Convocatoria de exámenes (mayo o noviembre)	MAYO	Año	2013

Asignatura del Programa del Diploma en la que se ha inscrito la monografía: MATEMÁTICAS

(En el caso de una monografía en lenguas, señale si se trata del Grupo 1 o el Grupo 2.)

Título de la monografía: EL VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE EN LA MATEMÁTICA ANTIGUA

Declaración del alumno

El alumno debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no reciba una calificación final.

Confirmo que soy el autor de este trabajo y que no he recibido más ayuda que la permitida por el Bachillerato Internacional.

He citado debidamente las palabras, ideas o gráficos de otra persona, se hayan expresado estos de forma escrita, oral o visual.

Sé que el máximo de palabras permitido para las monografías es 4.000, y que a los examinadores no se les pide que lean monografías que superen ese límite.

Esta es la versión final de mi monografía.

Firma del alumno:

Fecha:

Informe y declaración del supervisor

El supervisor debe completar este informe, firmar la declaración y luego entregar esta portada junto con la versión final de la monografía al coordinador del Programa del Diploma.

Nombre y apellido(s) del supervisor [MAYÚSCULAS]:

Si lo considera adecuado, escriba algunos comentarios sobre el contexto en que el alumno desarrolló la investigación, las dificultades que encontró y cómo las ha superado (ver página 13 de la guía para la monografía). La entrevista final con el alumno puede ofrecer información útil. Estos comentarios pueden ayudar al examinador a conceder un nivel de logro para el criterio K (valoración global). No escriba comentarios sobre circunstancias adversas personales que puedan haber afectado al alumno. En el caso en que el número de horas dedicadas a la discusión de la monografía con el alumno sea cero, debe explicarse este hecho indicando cómo se ha podido garantizar la autoría original del alumno. Puede adjuntar una hoja adicional si necesita más espacio para escribir sus comentarios.

El supervisor debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no se otorgue una calificación final.

He leído la versión final de la monografía, la cual será entregada al examinador.

A mi leal saber y entender, la monografía es el trabajo auténtico del alumno.

He dedicado $\boxed{4}$ horas a discutir con el alumno su progreso en la realización de la monografía.

Firma del supervisor: Fecha:

Formulario de evaluación (para uso exclusivo del examinador)

Criterios de evaluación	Máximo	Nivel de logro: Examinador 2	Máximo	Nivel de logro: Examinador 3
A Formulación del problema de investigación	2	2	2	
B Introducción	2	2	2	
C Investigación	4	4	4	
D Conocimiento y comprensión del tema	4	4	4	
E Argumento razonado	4	3	4	
F Aplicación de habilidades de análisis y evaluación apropiadas para la asignatura	4	3	4	
G Uso de un lenguaje apropiado para la asignatura	4	4	4	
H Conclusión	2	2	2	
I Presentación formal	4	4	4	
J Resumen	2	2	2	
K Valoración global	4	3	4	
Total (máximo 36)		33		

El volumen de la pirámide en la matemática antigua

Monografía de Matemáticas para el Diploma del B.I.

1 de marzo de 2013
N° de palabras: 3969

Resumen

Desde las primeras apariciones históricas de la matemática en las distintas civilizaciones humanas, una de las áreas más estudiadas ha sido la geometría. En esta monografía se van a comparar los distintos métodos que seguían los matemáticos de distintas civilizaciones en la antigüedad para resolver un mismo problema. Concretamente, vamos a estudiar con detalle de la determinación del volumen de una pirámide en la matemática griega del siglo III a.C. (cuyo máximo exponente fue Euclides) y en la matemática china del mismo periodo (donde se destaca la labor realizada a posteriori por Liu Hui), métodos que han llegado a nuestros tiempos gracias a la labor de distintos historiadores y traductores, a los que hay que agradecer las fuentes necesarias para esta monografía.

En primer lugar se explica el método chino, cuya parte fundamental es el curioso cálculo en el que se «desmenuza» una pirámide de base rectangular para obtener su volumen, además de obtener el volumen de un tronco de pirámide.
A continuación se estudia el método griego, donde la introducción de sucesivas proposiciones perfectamente demostradas conducen sucesivamente al hallazgo de la fórmula que da el volumen de una pirámide cualquiera. Nuevamente, la clave del procedimiento está en el «desmenuzamiento» de una pirámide de base triangular cualquiera.

Por último se comparan estos dos métodos, los cuales llegan a la misma conclusión. Es una sorpresa que, a pesar de la distancia física que separaba estas dos antiguas civilizaciones, sus métodos de descubrimiento matemático en este caso compartieran, con distintas formas, el mismo sabor.

Índice

1. Introducción

Desde la antigüedad, todas las civilizaciones que han existido han tenido una preocupación en mayor o menor grado por el estudio de las matemáticas. Desde antes de la existencia de la escritura, se tienen pruebas de diversas manifestaciones matemáticas muy rudimentarias, pero básicas para el ser humano. Poco a poco, estas manifestaciones fueron creciendo en complejidad y surgieron distintas ramas dentro de las matemáticas.

En la Antigua Grecia y en la China Imperial, alrededor del siglo III a.C. surgieron un gran número de personas que dedicaron buena parte de sus vidas a los estudios matemáticos: entre los griegos, podemos citar a Euclides y Arquímedes y se sabe que también hubo un gran número en China, de los que se tienen muchos menos datos.

En esta monografía nos centraremos en primer lugar en la matemática china, y más concretamente en Liu Hui[1] Su obra más importante, y una de las pocas conocidas, es la reedición de los *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, una obra anónima escrita sobre el siglo III a.C. que recogía todos los principios de la matemática china antigua, acompañados por un comentario propio. El comentario de Liu Hui a los *Nueve Capítulos del Arte Matemático* abarca diversas áreas de las matemáticas, desde una estimación del número π hasta numerosos cálculos de áreas y volúmenes de figuras, entre ellos el problema que concierne a esta monografía: el cálculo del volumen de la pirámide.

En segundo lugar, pasaremos a la matemática de la antigua Grecia. En esta cultura, de la que se tienen muchos más datos, se registró un inmenso interés por esta ciencia. La matemática se concebía como una forma de entender el mundo, una vía mediante la cual se podía aspirar a dar explicaciones del mundo que nos rodea. Nos centraremos en Euclides[2], cuya obra fundamental en geometría son los *Trece Libros de los Elementos*. En ellos, Euclides realiza un muy extenso estudio de la geometría; plana y de cuerpos sólidos, y, en particular, en el libro XII se encuentra el tema de la monografía: el cálculo del volumen de la pirámide.

[1] Liu Hui (siglo III d.C.) fue uno de los matemáticos chinos más importantes a lo largo de toda la historia. En la actualidad se sabe muy poco sobre este matemático, pero podemos afirmar que sentó las bases de la matemática china antigua por medio de su obra.

[2] Euclides (325 – 265 a.C.), fue uno de los matemáticos más importantes de la antigua Grecia, si bien su existencia no está completamente confirmada, dado que se baraja la teoría de que Euclides fuera el nombre de un equipo de matemáticos. Dejando su existencia a un lado, sí merece un reconocimiento la importancia que tuvo y sigue teniendo su obra, sobre todo en el campo de la geometría.

En la actualidad, estos dos métodos ya han quedado obsoletos. Sin embargo, aunque el método actual sea distinto a los dos presentados en esta monografía, es importante volver a las raíces de la matemática dado que en muchas ocasiones, la matemática moderna es una evolución directa de la antigua. Además de esto, las demostraciones presentadas merecen ser estudiadas y no caer en el olvido por el gran alarde de ingenio e inteligencia que demuestran.

Resumiendo, el problema sobre el que esta monografía trata es el de la comparación de los métodos que en la antigua Grecia y China se usaban para calcular el volumen de la pirámide. Además de esto, los objetivos finales que se persiguen son los siguientes:

- Conocer el origen del conocimiento matemático, descubriendo cómo en muchas ocasiones los métodos modernos son una evolución directa de los antiguos y muy próxima a ellos.
- Analizar y comparar los distintos métodos matemáticos usados por distintas civilizaciones aisladas geográficamente una de la otra para llevar a cabo una misma tarea, comprobando así similitudes y diferencias.
- Descubrir la belleza que encierran las matemáticas, y cómo pueden considerarse una ciencia inherente al ser humano.

2. Liu Hui: el volumen de la pirámide en la matemática china

2.1. El volumen del tronco de pirámide

El problema que vamos a tratar en esta monografía se introduce en el capítulo quinto del comentario ya citado de Liu Hui a los *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, con la demostración de una fórmula que permite calcular el volumen de un tronco de pirámide o pirámide truncada de base cuadrada. Un tronco de pirámide es el cuerpo que queda entre la base y la sección que produce un plano secante a la pirámide al cortar la pirámide por ese plano. Liu expone la siguiente fórmula para el caso que contempla, esto es, un tronco de pirámide que resulta de seccionar una pirámide de base cuadrada con un plano paralelo a la base:

$$V = \frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right) h\,, \tag{1}$$

donde a es la medida del lado de la base superior, b la medida del lado de la base inferior (ambas cuadradas) y h la altura de la pirámide truncada, es decir, la distancia entre los dos planos (paralelos) superior e inferior.

Para demostrarla, Liu Hui divide la pirámide truncada en piezas como se muestra en la Fig. 1.

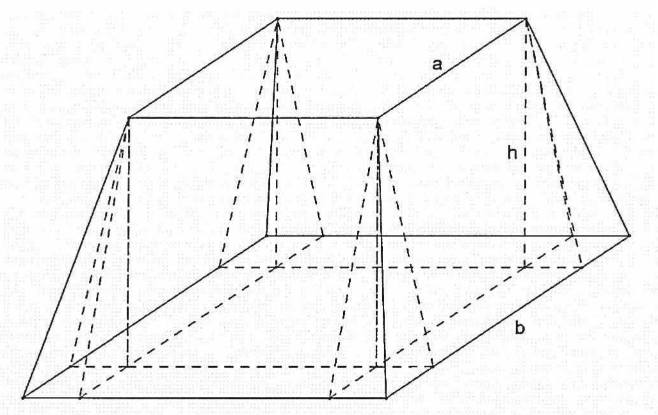

Fig. 1. División del tronco de pirámide de base cuadrada por Liu Hui.

Después de esta división, la pirámide se compone de un prisma de base cuadrada (en el centro), cuatro pirámides completas de base cuadrada (una en cada esquina) y otros cuatro sólidos en forma de cuña (uno en cada una de las caras laterales). A partir de esto, Liu Hui crea otros cuerpos de los que ya sabe calcular el volumen por yuxtaposición de estos sólidos más pequeños.

En primer lugar, junta el prisma central y los cuatro cuerpos en forma de cuña para crear un prisma más grande (como se muestra en la Fig. 2), con altura h y base de lados a y b. El volumen de este gran bloque es abh, es decir, el producto del área de la base por la altura, fórmula ya conocida en China.

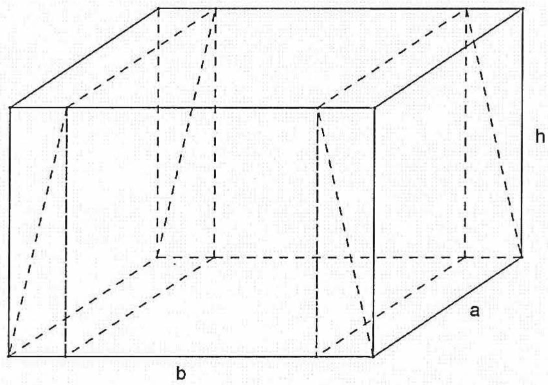

Fig. 2. Recomposición del prisma central y las cuatro cuñas.

De esta manera se puede escribir una primera ecuación correspondiente al volumen del sólido de la Fig. 2:

$$abh = \text{prisma central} + 4 \text{ cuñas}. \tag{2}$$

Liu Hui agrupó los cuerpos de una segunda manera para conseguir otro prisma más grande. En este caso, usó la pirámide truncada y fue completando todo el espacio necesario para obtener un prisma de base cuadrada con lado b y altura h. Para ello hace falta añadir otras 4 cuñas (una en cada lado), y 8 pirámides pequeñas (dos en cada esquina). Las nuevas cuñas son exactamente iguales que las ya existentes en la división de la pirámide truncada de la Fig. 1. Las nuevas pirámides no son iguales y no se dibujarán, pero tienen el mismo volumen que las anteriores, dado que Liu Hui da por sabido que el volumen de una pirámide es la tercera parte del prisma con iguales base y altura, cosa que va a probar en otro momento de su comentario.

Por tanto, se obtiene una segunda ecuación que corresponde a este segundo prisma construido:

$$\begin{aligned} b^2h = {} & \text{prisma central} + 2\,(\text{suma de las 4 cuñas}) + \\ & + 3\,(\text{suma de las 4 pirámides}). \end{aligned} \tag{3}$$

En último lugar, Liu Hui dispuso una tercera ecuación, que corresponde al volumen del prisma central obtenido en la división de la Fig. 1. Esta es:

$$a^2h = \text{prisma central.} \tag{4}$$

Sumando (2), (3) y (4) se concluye:

$$\begin{aligned} abh + b^2h + a^2h = \quad & 3\,(\text{prisma central}) + \\ & + 3\,(\text{suma de las 4 cuñas}) + \\ & + 3\,(\text{suma de las 4 pirámides})\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Por último, dividiendo esta última ecuación por 3 se obtiene la primera fórmula dada (1). Aunque Liu Hui no hizo esta demostración de forma general, sino para el caso concreto a=1, b=3 y h=1, se puede apreciar cómo sirve perfectamente para un caso genérico.

2.2. El volumen de la pirámide de base rectangular

En ese mismo comentario a los *Nueve Capítulos*, Liu Hui describe una demostración de la fórmula que al plantear la anterior ecuación (3) había supuesto correcta para el volumen de una pirámide de base rectangular: $V = \frac{1}{3}abh$, donde a y b son las dimensiones del rectángulo base y h es la altura de la pirámide. En principio, esta fórmula solo se demuestra en caso de una pirámide de base rectangular y con una de las aristas perpendicular a la base, llamada *yang-ma* por los antiguos chinos (Fig. 3).

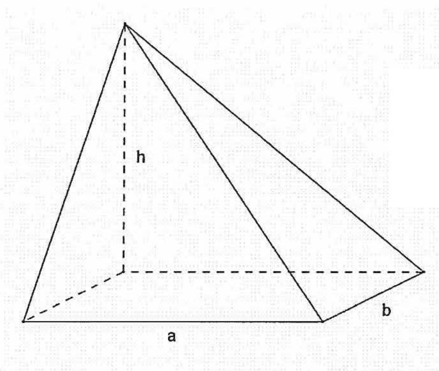

Fig. 3. *Yang-ma*.

Liu Hui empieza considerando el caso $h = a = b$. En primer lugar, presenta cómo un cubo se puede dividir en tres *yang-ma* cuyos vértices superiores coincidan, por lo que en este caso, la demostración de la fórmula (el volumen de este *yang-ma* es la tercera parte que el del cubo) es inmediata (Fig. 4).

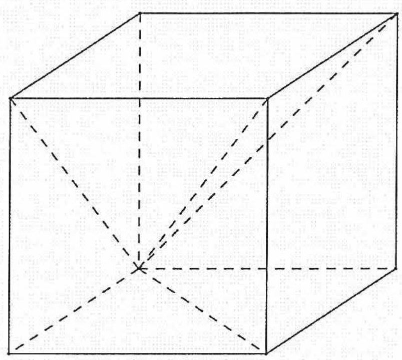

Fig. 4. División de un cubo en 3 *yang-ma*.

Después de esta primera comprobación, Liu Hui pasa a estudiar el caso general. Considera un *yang-ma* con dimensiones a, b y h (iguales a las de la Fig. 3). A esta pirámide le yuxtapone un tetraedro para formar un sólido con forma de cuña (Fig. 5).

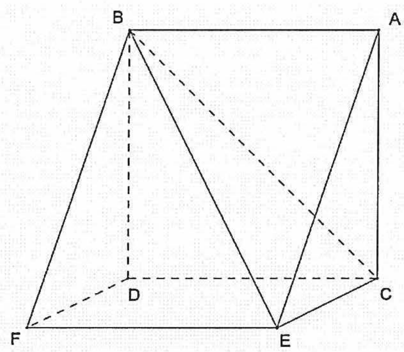

Fig. 5. Pirámide y tetraedro unidos formando una cuña.

Para simplificar y hacer un poco más fácil de seguir esta demostración, voy a denominar a partir de aquí:

$$
\begin{aligned}
C &= \text{Volumen de la cuña } ABDCEF, \\
P &= \text{Volumen de la pirámide } (\textit{yang-ma})\ BDFEC, \\
T &= \text{Volumen del tetraedro } BACE.
\end{aligned}
$$

El volumen de la cuña se deduce inmediatamente, ya que es la mitad que el del prisma de base rectangular; $C = \frac{1}{2}\,abh$. Como lo que se quiere demostrar es que $P = \frac{1}{3}\,abh$, y sabemos que $P + T = C$, tan solo hay que comprobar que $P = 2T$ para demostrar la fórmula propuesta para el volumen de la pirámide. Para demostrar esto, Liu Hui divide el tetraedro y la pirámide cortándolos por planos verticales y horizontales (Figuras 5 y 6).

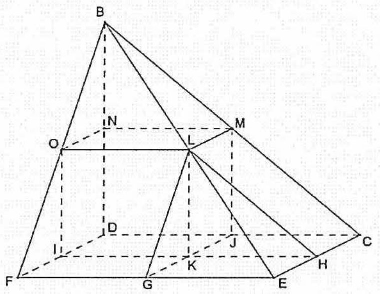

Fig. 6. División de la pirámide (*yang-ma*).

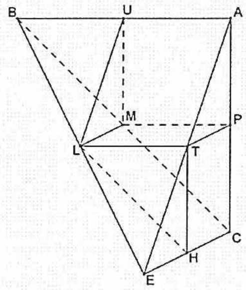

Fig. 7. División del tetraedro.

En la división de la pirámide (Fig. 6) se ha utilizado un plano horizontal $LMNO$ que es perpendicular a la arista BD y la divide en dos partes iguales, mientras que en la división del tetraedro (Fig. 7) se ha utilizado un plano horizontal $LMPT$ que es perpendicular a AC y la divide también en dos partes iguales. Los restantes planos usados en la división son verticales.

Así, los dos cuerpos quedan divididos en otros más pequeños de la siguiente forma:

- La pirámide (Fig. 6) queda dividida en un prisma de base rectangular, dos cuerpos en forma de cuña ($LMJKHC$ y $OLKIFG$) y otras dos pirámides más pequeñas similares a la primera (*yang-ma*), $BNOLM$ y $LKGEH$.
- El tetraedro (Fig. 7) queda dividido en dos sólidos en forma de cuña ($PAUMLT$ y $LMPTHC$) y otros dos tetraedros más pequeños ($BUML$ y $LTHE$).

Para analizar estas descomposiciones, en primer lugar hay que tener en cuenta lo que Liu Hui llama *volúmenes determinados*, esto es, las cuñas y el prisma que resultan en las divisiones. Como los planos que cortan a las dos figuras lo hacen por los puntos medios de las aristas correspondientes, se aprecia rápidamente que los cuatro cuerpos con forma de cuña en ambas son exactamente iguales, y que el prisma rectangular tiene el doble de volumen que cada una de las cuñas. Por tanto, la suma de los *volúmenes determinados* de la pirámide es el doble que la suma de los *volúmenes determinados* del tetraedro.

Sin embargo, aún quedan otros *sólidos indeterminados* (dos pirámides y dos tetraedros), de los que los recursos disponibles en la matemática china no permitían calcular el volumen. Estas dos pirámides y estos dos tetraedros vuelven a ser divididos de la manera antes descrita (Figuras 6 y 7), para obtener otros *volúmenes determinados* en proporción 1:2, otras dos pirámides aún más pequeñas y otros dos tetraedros y este proceso se sigue haciendo sucesiva e indefinidamente.

Con los conocimientos matemáticos actuales, se aprecia que este proceso se lleva hasta un límite en el que el volumen total de los *sólidos indeterminados* es más pequeño que cualquier cantidad positiva ε dada. Por tanto, estos *volúmenes indeterminados* se consideran «al final» despreciables, y con eso, Liu Hui va a terminar su demostración de que que el volumen de la pirámide es el doble que el del tetraedro. De esta forma concluye finalmente que el volumen de la pirámide (*yang-ma*) es:

$$V = \frac{1}{3}\,abh.$$

Sin embargo, en la época de Liu Hui no se tenían conocimientos sobre los límites, y su explicación final, rudimentaria desde un punto de vista matemático moderno pero no exenta de belleza poética, es la siguiente:

> *Cuanto más se dividen los cuerpos, los sólidos resultantes son más pequeños. Lo «sutil» consiste en esta cualidad de «pequeño» llevada al extremo. Lo que es sutil no tiene forma. Por tanto, ¿por qué hay que preocuparse por los volúmenes indeterminados restantes en este proceso?*

Este es el proceso mediante el cual Liu Hui consigue demostrar en su comentario a los *Nueve Capítulos del Arte Matemático* la fórmula que permite calcular el volumen de una pirámide, en el caso de una pirámide de base rectangular.

3. Euclides: el volumen de una pirámide en la matemática griega

3.1. Proposiciones previas

En primer lugar, como introducción que permita explicar el razonamiento de Euclides, voy a comentar la proposición 1 del libro X de los *Elementos*. Euclides propone:

> *Dadas dos cantidades diferentes, si de la mayor se resta una cantidad mayor que su mitad, y de lo que queda otra cantidad mayor que su mitad, y este proceso se repite sucesivamente, en algún momento quedará una cantidad que será menor que la menor de las dos dadas.*
>
> (X. 1)

Este lema tiene una demostración rápida basada en un principio más general que se conoce como *Axioma de Arquímedes*, equivalente a lo que hoy día escribiríamos como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Es crucial para la demostración griega, totalmente rigurosa, pero tratar más sobre él nos alejaría del propósito central de la monografía. Su demostración puede encontrarse en [1, pp. 14-15].

Ahora pasaremos a la demostración realizada por Euclides de la fórmula que da el volumen de una pirámide de base triangular. De hecho, Euclides prueba que la fórmula obtenida es válida para una pirámide de base poligonal cualquiera, pero nosotros nos ocuparemos solo del una base triangular. La demostración se desarrolla mediante la presentación de sucesivas proposiciones, recogidas en el libro XII de los *Elementos* [1, pp. 378-395]. La primera de ellas se enuncia a continuación:

> *Divídase una pirámide de base triangular en dos pirámides congruentes (iguales) entre sí y semejantes a la pirámide original y en dos prismas iguales. Entonces, el volumen total de los dos prismas será mayor que la mitad del volumen de la pirámide original.*
>
> (XII. 3)

Demostración:

Consideremos una pirámide cualquiera $DABC$ de base el triángulo $\triangle ABC$. Uniendo los puntos medios de cada una de las aristas se consigue una división de la pirámide en dos prismas y dos pirámides más pequeñas (Fig. 8). En esta figura se aprecia de manera bastante evidente que las pirámides $HAEG$ y $DHIJ$ son congruentes entre sí y semejantes (con una razón lineal $\frac{1}{2}$) a la pirámide original.

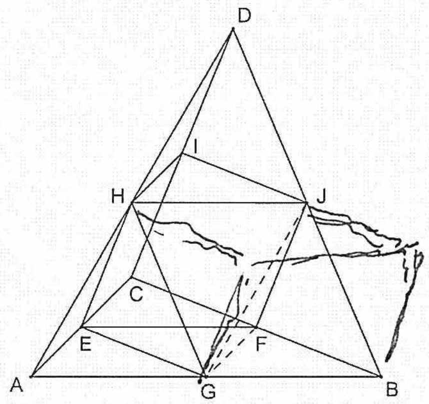

Fig. 8. División euclídea de una pirámide triangular.

Podemos comprobar fácilmente que los dos prismas que resultan de esta división tienen el mismo volumen. Si llamamos h a la altura de la pirámide $DABC$ correspondiente al vértice D, entonces:

$$\textit{volumen del prisma}\,(ECFHIJ) = \textit{área}\,(\triangle ECF) \cdot \frac{h}{2} \tag{6}$$

Por otra parte, el volumen del segundo prisma $HEGJFB$ es igual a la mitad del volumen del prisma que tiene de base el paralelogramo $GEFB$ y altura $\frac{h}{2}$ (ver Fig. 8). Además, el área de esta base $GEBF$ es el doble que el área del triángulo ECF, a consecuencia de estar dividida la pirámide por los puntos medios de cada arista. Es decir,

$$\textit{volumen del prisma}\,(HEGJFB) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \textit{área}(\triangle ECF) \cdot \frac{h}{2} \tag{7}$$

Obviamente, los resultados obtenidos en (6) y (7) son iguales, con lo que se comprueba que los dos prismas obtenidos en la división euclídea de una pirámide de base triangular tienen igual volumen.

Por último, en la Fig. 8 se aprecia claramente que el prisma $HEGJFB$ tiene mayor volumen que la pirámide $JGFB$, y por tanto, mayor volumen que la pirámide $HAEG$, dado que estas dos pirámides son congruentes, es decir, iguales entre sí. Como las dos pirámides resultantes de la división son iguales, así como también lo son los prismas, se concluye que la suma del volumen de los dos prismas es mayor que el de la suma de las dos pirámides y, por tanto, que la suma del volumen de los dos prismas es mayor que la mitad del volumen de la pirámide original.

Euclides prosigue la demostración presentando otra proposición:

Divídanse dos pirámides triangulares de la misma altura en otras dos pirámides congruentes entre sí y semejantes a la original y en dos prismas de igual volumen. Entonces, la razón de las áreas de las bases de las pirámides será la misma que la razón de los volúmenes de los prismas.

(XII. 4)

Nota: la división a la que se hace referencia en esta proposición es la misma que en (XII. 3), Fig. 8 y se realiza de la misma manera en las dos pirámides de igual altura, aunque su forma no sea igual.

Demostración:

Se consideran dos pirámides de igual altura divididas de la manera ya descrita, $ABCD$ y $A'B'C'D'$. Como las pirámides se dividen por los puntos medios de sus aristas, en cada una el segmento FE es paralelo a BA. Por tanto, los triángulos CFE y CBA son semejantes. Entonces, la razón entre las áreas de estos dos triángulos es la misma en las dos pirámides:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle EFC} = \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle E'F'C'}$$

Reorganizando los términos:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\triangle EFC}{\triangle E'F'C'}$$

El prisma $ECFHIJ$ y su correspondiente en la otra pirámide $E'C'F'H'I'J'$, tiene como altura la mitad que la altura de la pirámide original. Como las dos pirámides que se consideran en esta proposición tienen la misma altura, entonces estos dos prismas también tendrán una altura igual, por lo que sus volúmenes estarán en la misma razón que las áreas de sus bases.

$$\frac{prisma\ ECFHIJ}{prisma\ E'F'C'H'I'J'} = \frac{\triangle EFC}{\triangle E'F'C'}$$

Introduciendo la relación anterior, esta igualdad queda de la siguiente forma:

$$\frac{prisma\ ECFHIJ}{prisma\ E'F'C'H'I'J'} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}\ .$$

Como el otro prisma es igual en volumen al que se acaba de estudiar (XII. 3), entonces la suma del volumen de los prismas en cada una de las pirámides estará en la misma razón que las áreas de las bases.

Además, Euclides añade un lema al final de esta demostración: «*Las pirámides pequeñas resultantes de la división son semejantes a las grandes, pueden volver a dividirse de la misma manera un número indeterminado de veces, y siempre tendremos que la razón de la suma de volúmenes de los prismas en cada una de las pirámides es la misma que la razón de las áreas de las bases.*»

Esto termina la prueba de esta proposición. Euclides prosigue con la siguiente:

Dos pirámides de base triangular con la misma altura tienen una razón de volúmenes igual a la razón existente entre las áreas de sus bases.

(XII. 5)

Demostración:

Si realizamos la división de una pirámide presentada en (XII. 3) sucesivamente, obtendremos una gran cantidad de prismas y pirámides. El volumen de los dos prismas que se obtienen en cada una de las divisiones sucesivas es mayor que el de las pirámides que se obtienen al mismo tiempo, como se ha demostrado en (XII. 3), por lo que si al volumen de la pirámide original se le va restando el de los prismas obtenidos en cada división, las pirámides restantes que se obtengan llegarán en algún momento a tener un volumen menor que una cantidad positiva ε por pequeña que sea, según (X. 1).

Con los conocimientos matemáticos actuales no hay ninguna duda de que esto es llevar el proceso al límite, y que llegado a un punto extremo el volumen que representan las pirámides es despreciable. Por tanto, se puede considerar que el volumen de la pirámide original es el mismo que el de todos los prismas resultantes de la división.

Para demostrar esta proposición, se considerarán dos pirámides con la misma altura y se dividirán sucesivamente de la misma forma en (XII. 3). Como se acaba de explicar, el volumen de cada una de las pirámides es el mismo que el de la suma de los volúmenes de todos los prismas que se han obtenido por las divisiones sucesivas, dado que aumentando este número de divisiones, el volumen que no ocupan los prismas, es decir, el ocupado por las pirámides, puede ser tan pequeño como se quiera. Si aplicamos esto al postulado (XII. 4), que dice que la razón entre las sumas de los volúmenes de los prismas de cada una de las pirámides es la misma que la razón entre las áreas de las bases de las pirámides, se concluye que la razón entre los volúmenes de dos pirámides con la misma altura es la misma que la razón entre las áreas de sus bases.

Euclides realiza esta demostración por medio de un método mucho más extenso y exhaustivo, el cual no se reflejará en la monografía, pero se puede consultar en [1, pp. 386-388].

A continuación, Euclides realiza una extensión de esta proposición para pirámides con bases poligonales, no solo triangulares:

Dos pirámides de bases poligonales con la misma altura tienen una razón de volúmenes igual a la razón existente entre las áreas de sus bases.

(XII. 6)

La demostración de esta proposición no se explicará aquí al ser una simple generalización de la proposición (XII. 5), dado que las pirámides de bases poligonales se pueden dividir en varias pirámides de base triangular. Puede encontrarse en [1, pp. 392-393].

3.2. El volumen de la pirámide de base triangular

La parte final de la demostración euclídea comienza con la introducción de un nuevo postulado:

Todo prisma con base triangular se puede dividir en tres pirámides de bases triangulares de igual volumen.

(XII. 7)

Demostración:

Véase la Fig. 9. En ella se representa un prisma de base triangular dividido en tres pirámides de base triangular. Lo que se debe probar es que el volumen de las tres pirámides es el mismo.

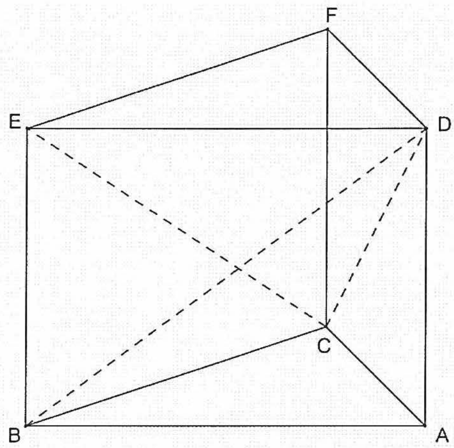

Fig. 9. División de un prisma en tres pirámides iguales.

En esta figura se aprecia que las tres pirámides a las que se hace referencia son $C(DAB)$, $C(DBE)$ y $D(CEF)$, donde la letra fuera del paréntesis representa el vértice y las otras tres los vértices de la base triangular.

En primer lugar, como $ABED$ es un paralelogramo, los dos triángulos DAB y DBE son iguales. Por tanto, las pirámides $C(DAB)$ y $C(DBE)$ tienen bases iguales y la misma altura. Aplicando la proposición XII. 5 se concluye inmediatamente que tienen el mismo volumen.

Por otra parte, $FECB$ también es un paralelogramo, así que por un razonamiento similar al anterior se deduce que las pirámides $D(CBE)$ (similar a $C(DBE)$) y $D(CEF)$ tienen el mismo volumen.

De esta manera se concluye que el prisma de base triangular original ha sido dividido en tres pirámides de base triangular de igual volumen, de lo cual Euclides deduce como consecuencia inmediata la fórmula que da el volumen de una pirámide de base triangular; este corolario va a cerrar esta monografía.

COROLARIO:

Toda pirámide es una tercera parte del prisma que tiene la misma base y altura.

NOTA:

La demostración euclídea del volumen de la pirámide, como todas las proposiciones de los *Trece Libros de los Elementos*, está demostrada con un rigor y una exhaustividad que hacen que sea irrefutable, pero también demasiado pesada y en muchos casos innecesaria para esta monografía. Por esta razón, las demostraciones de cada proposición han sido simplificadas y en algún momento se ha preferido recurrir a la explicación de Thomas L. Heath[3] antes que a la densa demostración de Euclides.

[3]Thomas Little Heath (1861 – 1940) fue un matemático inglés. La parte más importante de su obra consistió en la de la traducción de los trabajos de algunos matemáticos de la antigua Grecia al inglés. Entre estos trabajos se encuentra el usado en esta monografía, los *Trece Libros de los Elementos*.

4. Conclusión

Desde que se comienza a estudiar geometría en el colegio, a los alumnos se nos enseña que una pirámide comprende un volumen que corresponde a la tercera parte del volumen del prisma que tiene la misma base y altura que la pirámide. Pero, ¿de dónde viene esta fórmula?, ¿cómo se llegó a esta conclusión? Esta monografía no solo ha conseguido responder esta pregunta, sino que además ha presentado una respuesta doble.

De esta manera también se introduce la posibilidad de realizar una comparación entre los dos respuestas dadas a la pregunta, es decir, entre los dos distintos métodos presentados que permiten calcular el volumen de una pirámide.

Aunque los dos métodos presentados (el chino en primer lugar y el griego a continuación) parecen, en principio, muy distintos, se pueden observar muchas semejanzas entre ellos. En primer lugar, las dos demostraciones parten de una pirámide que es dividida en distintos cuerpos, algunos de ellos con volúmenes conocidos. Para proseguir la demostración, ambos métodos vuelven a dividir sucesivamente estos volúmenes más pequeños, lo que ahora conoceríamos como llevar este proceso hasta el infinito. Por último, también se concluye que la semejanza obvia es que en ambos casos, las demostraciones acaban con un mismo valor para el volumen de una pirámide, que es también igual al actual.

Sin embargo, que Liu Hui y Euclides llegasen a la misma solución y las demás coincidencias encontradas no significa que sus razonamientos tuvieran un origen común. En primer lugar, porque sus métodos y su razonamiento difieren mucho, tanto en la realización concreta como en la forma; en segundo lugar, aunque los *Nueve Capítulos* y la obra de Euclides puedan ser contemporáneos, la situación geográfica de cada uno de ellos hacen muy improbable que pudieran haberse transmitido físicamente estos conocimientos, dado que estamos hablando del siglo III a. C.

De esta manera, podemos considerar, como se ha mencionado en la introducción, la posibilidad de que las matemáticas tengan un carácter intrínsecamente ligado a la naturaleza humana, dado que sin importar el origen de todo ser humano, éste tiene una necesidad por explorar el mundo de distintas formas, entre ellas de una forma matemática. Y se puede apreciar también cómo este análisis matemático es completamente objetivo; dos culturas radicalmente distintas, mediante dos procedimientos distintos, consiguen llegar a unos mismos resultados.

Por último, es digno de admiración cómo, tanto Liu Hui como el primer escritor anónimo de los *Nueve Capítulos* y Euclides, con unos conocimientos matemáticos que hoy denominaríamos bastante básicos y rudimentarios, usando un gran alarde de ingenio consiguen realizar dos demostraciones totalmente correctas e irrefutables (sobre todo en el caso griego) e incluso aproximarse a una idea de la matemática actual como es la de "llevar un proceso hasta el infinito" o "pasar al límite", dejando así evidencia de lo importantes que son las raíces de la matemática en el planteamiento actual de esta ciencia.

Referencias

[1] TH. L. HEATH, *The thirteen books of Euclid's elements*, vol. III, reimp. Dover, New York, 1968.

[2] B. L. VAN DER WAERDEN, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, reimp. Springer-Verlag, Berlin, 1983.